

逆線形平行移動を与える曲線の存在について

永野哲也 (長崎県立大学)*

概要

フィンスラー空間の線形平行移動では、逆の線形平行移動を与える曲線の存在が、一般に知られていない。研究の目的は、そういう曲線を見つける数学的方法を確立することであるが、本日は、研究の過程でわかったわずかな結果を報告する。

はじめに

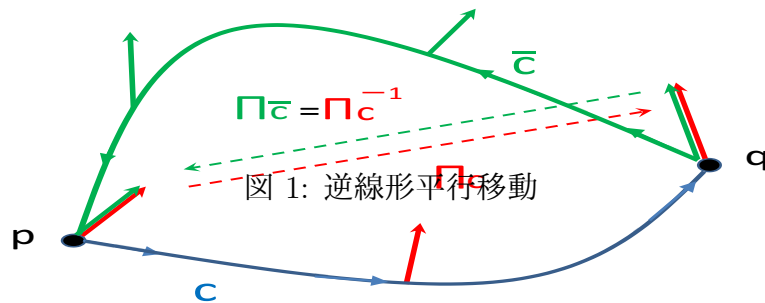
フィンスラー空間の、曲線に沿うベクトルの線形平行移動は、曲線 $c(t)$ と常微分方程式

$$\frac{dv^i}{dt} + F_{rj}^i(c, \dot{c})v^r \dot{c}^j = 0 \quad (\dot{c}^r = \frac{dc^r}{dt})$$

の解としてのベクトル場 $v(t)$ で与えられる。それはリーマン空間と同様に始点および終点における接空間の間の線形写像である。つまり、空間 M の2点 $c(a), c(b)$ と、 $c(a)$ から $c(b)$ へ至る曲線 $c(t) (a \leq t \leq b)$ に対して、接空間 $T_{c(a)}M, T_{c(b)}M$ の間の線形写像

$$\Pi_c : T_{c(a)}M \longrightarrow T_{c(b)}M \text{ (線形平行移動)}$$

である。リーマン空間との違いは、平行ベクトル場 $v(t)$ の逆ベクトル場 $v^{-1}(\tau) (\tau = a + b - t)$ は、必ずしも、逆曲線 $c^{-1}(\tau)$ に沿う平行ベクトル場にはなっていないことである。すなわち、 $\Pi_{c^{-1}} \neq \Pi_c^{-1}$ である。それゆえ、ループによるホロノミー集合が、必ずしも、群とならない。この研究は、どのような条件が満たされれば、常に逆の線形平行移動を与える曲線が存在するのかを明らかにすることであり、それが、フィンスラー空間のホロノミー群の研究および大域的な空間の研究につながると期待される。ここでは、 $F_{rj}^i(x, y), G_{rj}^i(x, y)$ は、カルタン接続とベアワルド接続のそれぞれの係数とし、式ではアインシュタインの規約を用い Σ は省略する。また、対象はすべて一つの座標近傍に含まれるとする。



* 〒 851-2195 長崎県西彼杵郡長与町まなび野 1-1-1 長崎県立大学 情報セキュリティ学科
e-mail: hnagano@sun.ac.jp

1. 与えられたベクトル値関数を平行ベクトル場とする曲線の存在条件

命題1 $v(t) = (v^1(t), v^2(t), \dots, v^n(t))$ ($0 \leq t \leq \delta$) を与えられたベクトル値関数とする。

このとき、 x, y を未知関数とする方程式 $\frac{dv^i}{dt} + F_{rj}^i(x, y)v^r y^j = 0$ と、ある $a = (a^i), b = (b^i) \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$(1) \frac{dv^i}{dt}(0) + F_{rj}^i(a, b)v^r(0)b^j = 0 \quad \text{かつ} \quad (2) \det(G_{rj}^i(a, b)v^r(0)) \neq 0$$

が満たされるならば、点 $(0, a, b) \in \mathbf{R}^{2n+1}$ の近傍で

$$a = c(0), b = \dot{c}(0) \quad \text{かつ} \quad \frac{dv^i}{dt} + F_{rj}^i(c, \dot{c})v^r \dot{c}^j = 0$$

を満たす曲線 $c(t)$ が存在する。

(証明の概略) 陰関数定理の言い換えである。 $f^i(t, x, y) = \frac{dv^i}{dt} + F_{rj}^i(x, y)v^r y^j$ として、 $f(t, x, y) = (f^1(t, x, y), f^2(t, x, y), \dots, f^n(t, x, y))$ かつ、ある $a, b \in \mathbf{R}^n$ で $f(0, a, b) = 0$, $\det(D_y f(0, a, b)) \neq 0$ ならば、 $(0, a, b)$ の近傍で、 $y^i = \phi^i(t, x)$ が存在して、 $f(t, x, \phi(t, x)) = 0$ を満たす。 $D_y f(t, x, y)$ はヤコビアン行列である。また、フィンスラーテンソルの計算から $\frac{\partial f^i}{\partial y^j} = G_{rj}^i(x, y)v^r(t)$ となる。このとき、常微分方程式 $\frac{dc^i}{dt} = \phi^i(t, c(t))$ の解として、上記条件を満たす曲線 $c(t)$ が得られる。

2. 与えられた2曲線が、互いに他の線形平行移動の逆移動を与える曲線であるための条件

命題2 2点 p, q に対して、 p から q へ向かう曲線を $c(t)$ ($0 \leq t \leq a$)、 q から p へ向かう曲線を $\bar{c}(t)$ ($0 \leq t \leq a$) とする。 c 上の2点 $p = c(0), c(t)$ で定まる線形平行移動 Π_c の表現行列を $A_j^i(t)$ とするとき、曲線 \bar{c} が逆の線形平行移動を与える曲線であるための必要十分条件は

$$F_{0r}^i(c(t), \dot{c}(t))A_j^r(t) + F_{0j}^r(\bar{c}(t), \dot{\bar{c}}(t))A_r^i(t) = 0$$

が曲線 c 上で満たされることである。このとき、 c 上の平行ベクトル場 $v(t)$ を $v(t) = A(t)v(0)$ とすると、 \bar{c} 上の逆の平行ベクトル場 $u(t)$ は、 $u(t) = B(t)v(a)$ で与えられ、 $B = A^{-1}$, $A(0) = I$, $B(0) = I$, $B(a) = A(a)^{-1}$, $u(0) = v(a)$, $u(a) = v(0)$ である。

(証明の概略) c, \bar{c} が互いに他の逆線形平行移動を与える曲線として、 $(B_j^i) = (A_j^i)^{-1}$ とする。また、それぞれの平行ベクトル場を $v(t), u(t)$ とすると、 $v^i(t) = A_r^i(t)v^r(0)$, $u^i(t) = B_r^i(t)v^r(a)$ で、 $\frac{dv^i}{dt} + F_{rj}^i(c, \dot{c})v^r \dot{c}^j = 0$ から $\frac{dA_r^i}{dt} + F_{0k}^i(c, \dot{c})A_r^k = 0$ かつ、 $\frac{du^i}{dt} + F_{rj}^i(\bar{c}, \dot{\bar{c}})u^r \dot{\bar{c}}^j = 0$ から $\frac{dB_r^i}{dt} + F_{0k}^i(\bar{c}, \dot{\bar{c}})B_j^k = 0$ が得られる。 $\delta_j^i = A_r^i B_j^r$ から、 $0 = \frac{d(A_r^i B_j^r)}{dt} = \frac{dA_r^i}{dt} B_j^r + A_r^i \frac{dB_j^r}{dt}$ に $A(t), B(t)$ の満たす微分方程式を代入すると定理の式が得られる。逆は、ここに示した計算が逆にたどられて証明が終わる。

参考文献

- [1] M. Crampin : *Randers spaces with reversible geodesics*, Publ. Math. Debrecen, 67(3-4):401-409,2005.
- [2] N. Innami, T. Nagano, and K. Shiohama. : *Geodesics in a Finsler surface with one-parameter group of motions*, Publ. Math. Debrecen, 89(1-2):137-160, 2016.
- [3] N. Innami, Y.Itokawa, T. Nagano, and K. Shiohama. : *Parallel axiom and the 2-nd order differentiability of Busemann functions*, Publ. Math. Debrecen, 91(3-4):403-425, 2017.